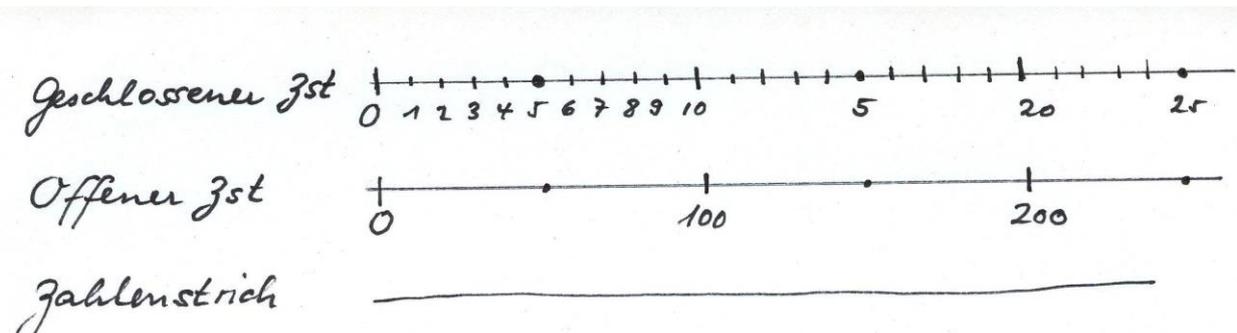


# Ein Plädoyer für den Zahlenstrahl

Der Zahlenstrahl hat zum Teil einen schlechten Ruf, er verführe zum Abzählen, was ja nicht das Ziel des Rechenunterrichtes sein könne. Ausserdem unterstütze er einseitig den ordinalen Zahlenbegriff (Zahlen als Positionen, nicht als Mengen). Im Heilpädagogischen Kommentar zum Zahlenbuch wird klargestellt, er dürfe „...nicht als Rechenhilfsmittel...“ verwendet werden. (Schmassmann & Moser, S.12) Das muss aber nicht so sein! In meiner Praxis habe ich den Zahlenstrahl sehr erfolgreich eingesetzt. Wesentlich war aber stets, dass ich ihn sorgfältig und zielorientiert einführte.

Vorerst sollte man zwischen 3 Varianten des Zahlenstrahls unterscheiden:



Der **geschlossene Zahlenstrahl** eignet sich, Gesetzmässigkeiten des dekadischen Systems kennen zu lernen. Die Arbeit damit verlangt, dass er nicht für blosse Zählübungen verkommt. Man soll ihn nur punktuell verwenden, nicht als Rechenhilfsmittel.

Der **offene Zahlenstrahl** ermöglicht es der Lehrperson und den Kindern, unzählige Denkaufgaben zu erfinden, Er ist offen, d.h. nicht alle Schritte sind markiert. Er eignet sich auch zum Schätzen.

Mit dem **Zahlenstrich (leerer Zahlenstrahl)** kann der Schüler seine Rechenwege selbständig protokollieren. Ausserdem sieht man sofort, wie der Schüler gerechnet hat.

## Der Zahlenstrahl und die NeurologieLL

Vorerst ein kleines Experiment für den Leser, die Leserin:

*Zähle bitte laut von 90 bis 100. Rechne nun  $90+8$ , das gibt.... Rechne nun  $98-3=...$*

Was ist beim Rechnen in deinem Inneren passiert? Du hast beim Addieren in der Vorstellung eine vage Bewegung nach rechts gemacht, bei der Subtraktion nach links. Ausserdem: bei 98 wusstest Du automatisch, dass es bis Hundert 2 Schritte nach rechts sind, von 98 bis 95 aber 3 Schritte nach links.

Deine Feststellung entspricht der Erkenntnis der Neurologie (Dehaene, 1999), dass Rechnende einen vagen inneren Zahlenstrahl entwickeln (er ist nicht von Anfang an da!) und dass dieser ein wesentlicher Bestandteil beim Rechenprozess ist. Der innere Zahlenstrahl ist entsprechend der Schreibrichtung nach rechts gerichtet (selten nach vorne).

## Der Zahlenstrahl als gutes Arbeitsmittel

Ein gutes mathematisches Erarbeitungsmittel für Rechenanfänger muss folgende Kriterien erfüllen:

- Es ist einfach, es unterstützt den Aufbau eines inneren Zahlenstrahls nach rechts
- Es regt - von der Lehrperson richtig angeleitet - zum Denken an. Ich plädiere für "Geführtes Entdecken"

- Das Arbeitsmittel sollte eine motivierende Selbsttätigkeit und Selbstwirksamkeit ermöglichen, also Freude bereiten
- Es soll mathematische Strukturen (Kraft der 5, der 10, der 100, der 1000 etc.) sichtbar machen

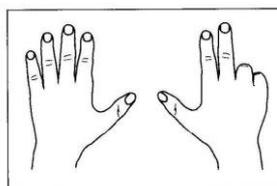
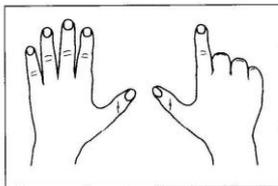
\* "Geführtes Entdecken" ist ein Ausdruck von mir. Inspirieren liess ich mich von Sokrates, der kaum etwas erklärte, sondern den Lernenden durch geschicktes Fragen Schritt für Schritt zur Lösung hinführte. Der Lernende hat so den Eindruck, selber auf die Lösung gekommen zu sein. Dies ermöglicht grosse Selbstwirksamkeit und Freude.  
Ich halte nicht viel von reinem „selbstentdeckenden Lernen“, wo der Schüler mit seinen zum Teil schlechten Lösungswegen allein gelassen wird. (Felten 2016).

Diese vier Kriterien erfüllt der Zahlenstrahl voll. Ich machte die Erfahrung, dass die selbsttätige Arbeit mit dem Zahlenstrahl Freude macht, auch schwächeren Rechnern. Letztere profitierten sogar stark.

### Aufbau und Ziele der Arbeit am Zahlenstrahl

Ich beschränke mich nun mehrheitlich auf den offenen Zahlenstrahl und den Zahlenstrich. Diese sollten mit den Schülern sorgfältig erarbeitet werden.

Als Vorbereitung auf den Zahlenstrahl hat sich das Rechnen an den Fingern bewährt. Wenn das lernende Kind beide Hände vor sich mit den Fingern auf das Pult legt, entsteht ein Fingerbild, das entfernt einem Zahlenstrahl gleicht:



Die „Kraft der 5, der 10“ ist klar ersichtlich und spürbar

*Zeige mir 7 Finger!*

$$5+2=7$$

$$7-2=5$$

*Zeige mir 8 Finger!*

$$5+? = 8$$

$$8+? = 10$$

Mit etwas Fantasie lassen sich an den Fingern viele anregende Übungen machen, welche zum mathematischen Basisdenken gehören:

Zählen vor- und rückwärts, und ohne abzuzählen: zerlegen, ergänzen, addieren (von l nach r), subtrahieren (von r nach l), Zehnerüberschreitung (dekadisches System verstehen)

Wichtig ist, dass von links nach rechts geübt wird, ausser bei minus. Bei 5-3 im obigen Beispiel sollten z.B die 3 Finger der rechten Hand eingeklappt werden.

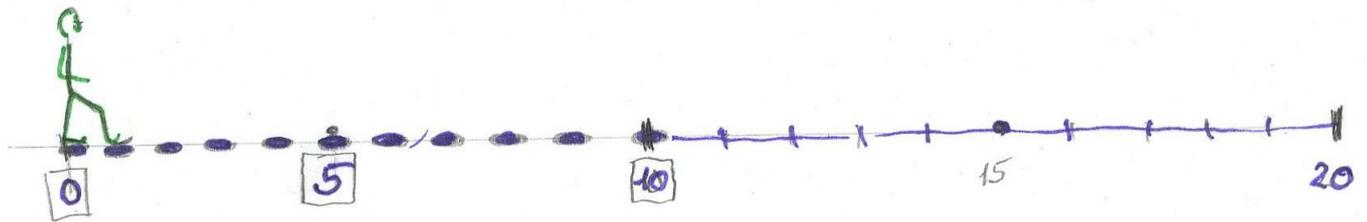
### Die Betonung des Längenaspekts (Lorenz 2008, Gaidoschik 2003)

Die einzelnen Ziffern des Zahlenstrahls (1, 2, 3...) sollten von Anfang an nicht als Positionen, sondern als Längenaspekt eingeführt werden, denn es geht darum, die Zahlen vor allem als Mengen (kardinal) zu begreifen. Beispielsweise wäre die 8 am Zahlenstrahl nicht nur ordinal Position 8 (links davon die 7 und rechts die 9) sondern die Menge 8 (7 wäre 1 Einheit weniger, 9 eine Einheit mehr).

### Schritte zählen und Schritte schätzen

Zahlen sollen also bei Rechenanfängern als Längeneinheit dargestellt werden. Als Einstieg eignen sich die eigenen Schritte, die vom Kind selber protokolliert werden können. Dabei lernt das Kind das Grundprinzip der Kardinalzahl kennen, dass nämlich jede Zahl aus entsprechend vielen Einheiten besteht. 4 ist also 1+1+1+1, 5 ist 1+1+1+1+1 etc. So besteht 5 aus einer Einheit mehr als die 4, die 3 aus einer Einheit weniger.

Das Kind kann vorerst auf einer imaginären Linie schreiten und die eigenen Schritte (Einheits-Strecken) vorerst am Boden mit Nummernzetteln markieren. Achte bereits jetzt, dass die 5 und die 10 besonders hervorgehoben werden:



Solche Aufforderungen und Fragen der Lehrperson regen zum Denken an:

Lehrperson: Du beginnst bei null. Was bedeutet die Null hier?

Schülerin: 0 Schritte

Lehrperson: Gehe 3 Schritte ... wo bist du jetzt?

Schülerin: Bei der 3

Lehrperson: Geh nun einen Schritt weiter... Du bist nun bei der ...

Schülerin: ...bei der 4

Lehrperson: Was bedeutet die 4?

Schülerin: Ich bin 4 Schritte gegangen.

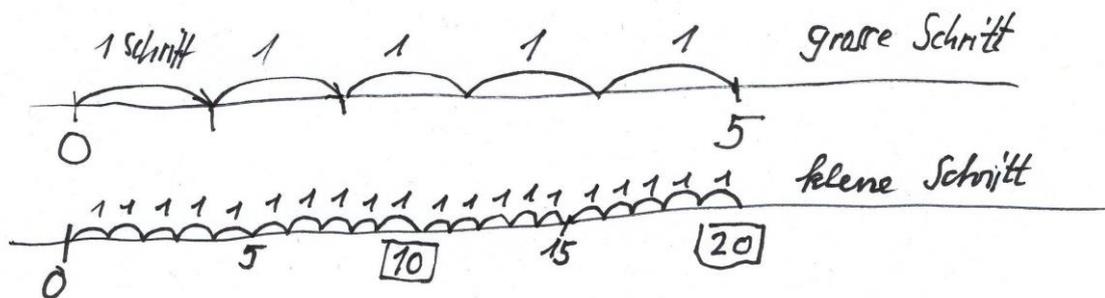
Lehrperson: Wie weit ist es bis zur 5? Bis zur 10? Was ist die Hälfte von 10 Schritten? Das Doppelte von 3 Schritten? usw.

Lassen eurer Fantasie freien Lauf!

Methodisch hervorragend für die Entwicklung innerer Bilder sind

- das Verbalisieren während des Abschreitens
- das nachträgliche Erklären und Reflektieren des eigenen Tuns und
- anschliessend das selbständige Protokollieren.

Das Protokoll von Liza sieht z.B. so aus:



Die 0, die 5, die 10 etc. werden speziell markiert.

Auf dieser ikonischen Stufe lässt sich gut verbalisieren:

Liza, zeige auf deinem Protokoll 8 Schritte, 3 Schritte, wie viele sind es bis zu 5 Schritten?

Du bist 10 Schritte gegangen, wie viele Schritte sind es bis zur 13? Was bedeuten die Ziffer 1 und die und die Ziffer 3 bei 13? Bei 17? Bei 21?

Obige Überlegungen lassen sich jeweils als Gleichung im Heft protokollieren:  $17=10+7$ ,  $21=10+10+1$  etc.

Wieso sind es oben weniger Schritte für die gleiche Strecke? Mit dieser Frage wird das Kind zu folgenden Einsichten angeregt: Je kleiner die Schritte, desto mehr braucht es für die

gleiche Strecke und umgekehrt. Indirekt ist dies eine Vorbereitung auf das Verstehen von Masseinheiten.

### Ersatz für die Schritte: Haselstecken und 10-cm-Stäbchen

Man sollte nicht zu lange bei den eigenen Schritten bleiben; 1m lange Haselstecken (mit den Eltern im Wald geschnitten!) sollen sie ersetzen. Da das Schätzen sehr wichtig für die Bildung inneren Wissens über Mengen ist, kann z.B. geschätzt werden, wie viele Haselstecken (=Meter) es bis zum Brunnen sind. Anschliessend wird zum Überprüfen gezählt. *Ariane zählte 24 Meter, Edith nur 23. Warum dieser Unterschied? Man wirft einen Ball. Wie weit ist er geflogen? Es wird mit dem Meter-Stecken gemessen. Wie lange ist dein Zimmer?*

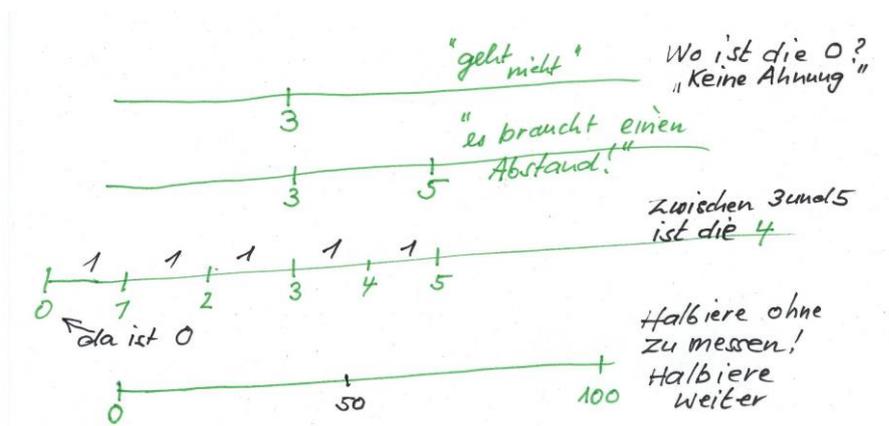
Nun ersetzen 10cm lange Holzspiesse den Meter. Damit lässt sich auf kleinem Raum messen.

### Zahlenstrich und offener Zahlenstrahl

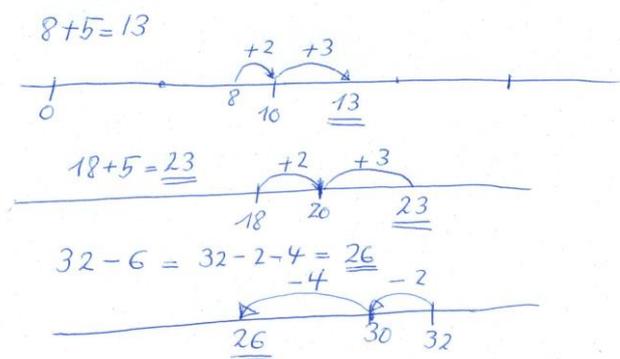
Jetzt ist der Moment gekommen, wo wir auf höherer Abstraktionsstufe zeichnerisch am leeren Zahlenstrahl (Zahlenstrich) und offenen Zahlenstrahl unzählige Übungen machen können:

- Übungen zum Verständnis der Zehnerüberschreitung,
- zum dekadischen System,
- zum Einüben optimaler Rechenwege und
- zum Vertiefen grundlegender mathematischer Gesetzmässigkeiten.

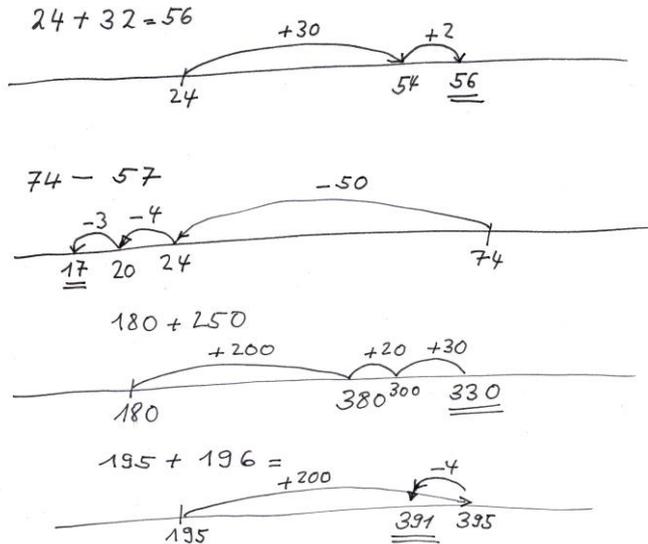
### Schätzen und nachdenken am offenen Zahlenstrahl



### Zur Zehnerüberschreitung und -Unterschreitung am Zahlenstrahl



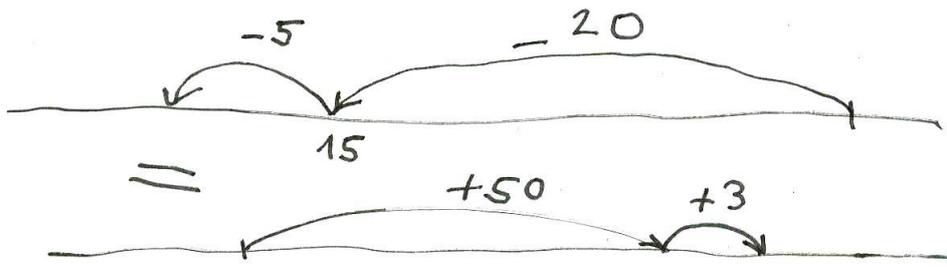
## Protokollierung von Rechenwegen am Rechenstrich



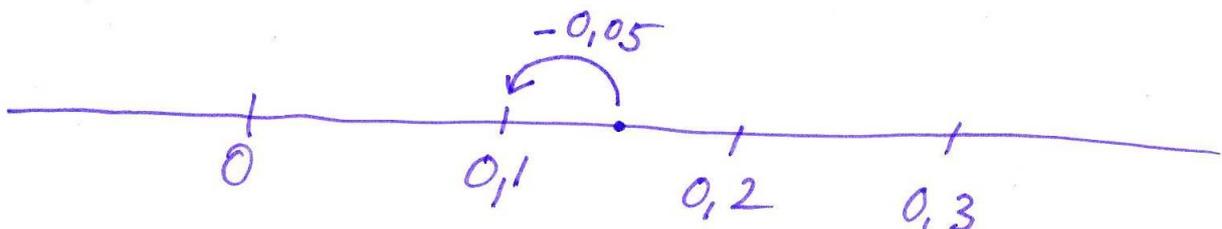
Dieses Protokollieren sollte immer wieder verbalisiert werden. Gerade für schwächere und schwache Schüler erwies sich das Protokollieren einfacher Rechenwege als sehr förderlich.

Wertvoll sind Aufgaben, wo herausgefunden werden muss, wie z.B. eine andere Schülerin wohl gerechnet hat, wenn gewisse Angaben beim Protokollieren fehlen:

Was hat Julia gerechnet?



Der Zahlenstrahl kann bis in die oberen Klassen eingesetzt werden. Er eignet sich auch beim Aufbau des dekadischen Systems (z.B. Dezimalbrüche), beim Protokollieren von Lösungswegen im Millionenbereich, bei gewöhnlichen Brüchen.



Schlechte Rechenwege, wie z.B. der von Tania:  $83-35= 8-3=5/ 3-5=2/ 5---50/ 50-2=48$  lassen sich nicht protokollieren. Probieren Sie es!

Sinnvoll ist es, die erste Menge (83) als Päckchen zu nehmen, dann die Zehner, dann die Einer zu addieren. Das ist weniger fehleranfällig, weil der Arbeitsspeicher entlastet ist:  $83-30-5!$  So lässt sich das Ganze gut protokollieren.

### Zusammenfassung

Die Arbeit am Zahlenstrahl bedarf einer guten schrittweisen Einführung. Die Sorgfalt macht sich bezahlt. Das Arbeitsmittel ist einfach, man kann selbsttätig und kreativ sein. Ausserdem ist der leere Zahlenstrich äusserst preiswert, er wird von keinem Lehrmittelverlag vertrieben! Das ist wohl der Grund, weshalb für ihn kaum Propaganda gemacht wird...

Neurologisch ist es ein sehr sinnvolles Arbeitsmittel und durch die Selbsttätigkeit steigt die Selbstwirksamkeit bis hin zur Freude. Die Auseinandersetzung am offenen Zahlenstrahl und am Zahlenstrich erlaubt eine denkerische Auseinandersetzung mit der Materie, sodass mathematische Strukturen und Basiskompetenzen (Addition, Ergänzen, Zerlegen, Subtraktion, Multiplikation, Division, optimale Rechenwege, dekadisches System, Stellenwert, Überschreitung und Unterschreitung usw.) sichtbar gemacht werden können und sich einprägen. Insbesondere schwache Schüler, aber nicht nur diese, konnten sich regelmässig verbessern. Und ich als Therapeut: ich hatte Freude und konnte meine Kreativität leben.

Lic. phil. Michel Leuenberger, Basel

rechenschwaeche.ch

Dehaene, St. (1999). Der Zahlensinn. Berlin: Birkhäuser

Felten, M. (2016). Nur Lernbegleiter? Unsinn, Lehrer! Berlin: Cornelsen

Gaidoschik, M. (2003). Rechenschwäche-Dyskalkulie Horneburg: Persen

Lorenz, J.H. (2008). Lernschwache Rechner fördern. Berlin: Cornelsen

Schmassmann, M. & Moser Opitz, E. (2014) Heilpädagogischer Kommentar 3, Zug: Klett



Abschreiten



1m-Stecken aus Hasel,  
im Wald geschnitten



Der Kleine macht auch mit



Mit Nägeln messen